(D2) Qualunque funzione di commutazione di due variabili $f(x,y)$ può essere espressa nella forma

$$f(x,y) = a \oplus bx \oplus cy \oplus dxy$$

Ricavare i coefficienti *a*, *b*, *c*, *d* in funzione dei valori assunti da $f(x,y)$.

Sostituendo nell'espressione le quattro possibili combinazioni di *x*, *y* si ottiene:

$$f(0,0) = a \oplus (b \cdot 0) \oplus (c \cdot 0) \oplus (d \cdot 0 \cdot 0) = a$$
$$f(0,1) = a \oplus (b \cdot 0) \oplus (c \cdot 1) \oplus (d \cdot 0 \cdot 1) = a \oplus c$$
$$f(1,0) = a \oplus (b \cdot 1) \oplus (c \cdot 0) \oplus (d \cdot 1 \cdot 0) = a \oplus b$$
$$f(1,1) = a \oplus (b \cdot 1) \oplus (c \cdot 1) \oplus (d \cdot 1 \cdot 1) = a \oplus b \oplus c \oplus d$$

In primo luogo si ha:

$$a = f(0,0)$$

Da $f(0,1) = a \oplus c$ segue $a \oplus f(0,1) = a \oplus a \oplus c = c$ e dunque

$$c = a \oplus f(0,1) = f(0,0) \oplus f(0,1)$$

Da $f(1,0) = a \oplus b$ segue $a \oplus f(1,0) = a \oplus a \oplus b = b$ e dunque

$$b = a \oplus f(1,0) = f(0,0) \oplus f(1,0)$$

Da $f(1,1) = a \oplus b \oplus c \oplus d$ segue $a \oplus b \oplus c \oplus f(1,1) = a \oplus b \oplus c \oplus a \oplus b \oplus c \oplus d = d$ e dunque

$$d = a \oplus b \oplus c \oplus f(1,1) = f(0,0) \oplus f(0,1) \oplus f(1,0) \oplus f(1,1)$$

In definitiva:

$$a = f(0,0)$$
$$b = f(0,0) \oplus f(1,0)$$
$$c = f(0,0) \oplus f(0,1)$$
$$d = f(0,0) \oplus f(0,1) \oplus f(1,0) \oplus f(1,1)$$

A titolo di esempio, i coefficienti per la funzione $f(x,y) = x + \overline{y}$ sono:

$$a = f(0,0) = 1$$
$$b = f(0,0) \oplus f(1,0) = 1 \oplus 1 = 0$$
$$c = f(0,0) \oplus f(0,1) = 1 \oplus 0 = 1$$
$$d = f(0,0) \oplus f(0,1) \oplus f(1,0) \oplus f(1,1) = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1$$

con conseguente espansione

$$x + \overline{y} = 1 \oplus y \oplus xy$$

Infatti

$$\begin{aligned} 1 \oplus y \oplus xy &= \overline{y} \oplus xy = \\ &= xy + \overline{y}(\overline{x} + \overline{y}) = \\ &= xy + \overline{y} = \\ &= x + \overline{y} \end{aligned}$$